Простейшие нелинейные задачи

Лектор: д.ф.-м.н., профессор
Темирбеков Н.М.

Пусть в вещественном гильбертовом пространстве $H = L_2(0,1)$ рассматривается оператор $A(v)$:

$$A(v) = -\frac{d}{dx} v \frac{d}{dx}, \quad (6.1)$$

действующий на функции $v(x)$ определенные на $\Omega = (0,1)$ и принадлежащие множеству $D(A) \subset H$. Будем предполагать, что фунции $v \in D(A)$ достаточно гладкие, так что

$$A(v)v = -\frac{d}{dx} v \frac{d}{dx} \in H, \quad (6.2)$$

$$\frac{dv}{dx} = 0, \text{ при } x = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} = 0, \text{ при } x = 1, \quad (6.3)$$

$$(A(\upsilon)\upsilon,\omega) = -\int_0^1 \omega \frac{d}{dx} \upsilon \frac{d}{dx} dx. \ (6.4)$$

$$(A(\upsilon)\upsilon,\omega) = -\omega\upsilon \frac{d\upsilon}{dx} \Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \upsilon \frac{d\omega}{dx} \frac{d\upsilon}{dx} dx. \ (6.5)$$

$$(A(\upsilon)\upsilon,\omega) = \int_0^1 \frac{d\upsilon}{dx} \left(\upsilon \frac{d\omega}{dx}\right) dx. \ (6.6)$$

$$(A(\upsilon)\upsilon,\omega) = \upsilon \left(\upsilon \frac{d\omega}{dx}\right) \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \upsilon \frac{d}{dx} \upsilon \frac{d\omega}{dx} dx. \ (6.7)$$

Теперь введем в рассмотрение множество функций $D(A^*) \subset H$. Будем предполагать, что функции $\omega \in D(A^*)$ достаточно гладкие, так что оператор $\left(\frac{d}{dx}\right) \upsilon \left(\frac{d}{dx}\right)$ на ω имеет смысл, и

$$\frac{d}{dx} \upsilon \frac{d\omega}{dx} \in H, \upsilon \in D(A), \omega \in D(A^*).$$

функции $\omega \in D(A^*)$ на границе области $\Omega = (0,1)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{d\omega}{dx} = 0 \text{ при } x = 0,$$

$\frac{d\omega}{dx} = 0$ при $x = 1$, (6.8)

когда $\omega \in D(A^*)$, внеинтегральный член в формуле (6.7) обратится в нуль, мы имеем

$(A(v)v, \omega) = -\int_0^1 v \frac{d}{dx} v \frac{d\omega}{dx} dx.$ (6.9)

$A^*(v) = -\frac{d}{dx} v \frac{d}{dx}.$ (6.10)

$(A(v)v, \omega) = (v, A^*(v)\omega), v \in D(A), \omega \in D(A^*)$, (6.11)

$J_p[\varphi] = (p, \varphi)$,

$$-\frac{d}{dx}\varphi\frac{d\varphi}{dx} = f(x),$$

$\frac{d\varphi}{dx} = 0$ при $x = 0$, *(6.12)*

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \text{ при } x = 1,$$

где $f(x)$ - заданная функция из *H.*

$J_p[\varphi] = \int_0^1 p(x)\varphi(x)dx, p \in H$. (6.13)

$$-\frac{d}{dx}\varphi\frac{d\varphi^*}{dx} = p(x),$$

$\frac{d\varphi^*}{dx} = 0$ при $x = 0$, *(6.14)*

$\frac{d\varphi^*}{dx} = 0$ при$x = 1$, Получим теперь представление функционала $J_p[\varphi]$ через решение сопряженной задачи (6.14). Умножим уравнение (6.12) на φ^*, а уравнение (6.14) на φ, проинтегрируем результаты по x на (0,1) и результаты вычтем один из другого. Тогда

$$-\int_0^1 \varphi^* \frac{d}{dx}\varphi \frac{d\varphi}{dx} dx + \int_0^1 \varphi \frac{d}{dx}\varphi \frac{d\varphi^*}{dx} dx = \int_0^1 f(x)\varphi^* dx - \int_0^1 p(x)\varphi dx$$

.

$$\int_0^1 f(x)\varphi^* dx = \int_0^1 p(x)\varphi dx. \quad (6.15)$$

$$J_p = \int_0^1 p(x)\varphi dx, \quad J_p = \int_0^1 f(x)\varphi^* dx.$$

$$J_p = \int_0^1 p(\varphi, x)\varphi dx, \quad J_p = \int_0^1 f(x)\varphi^* dx. \quad (6.16)$$

$$p(\varphi, x) = \varphi,$$

$$J_p = \int_0^1 \varphi^2 dx, \quad (6.17)$$

$$J_p = \int_0^1 f\varphi^* dx.$$

Пример. Пусть $f(x) = cos2\pi x$, тогда основная задача (6.12) имеет вид

$$-\frac{d}{dx}\varphi\frac{d\varphi}{dx} = cos2\pi x, x \in (0,1),$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \text{ при } x = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \text{ при } x = 1.$$

решение $\varphi = (\frac{1}{\pi})cos\pi x$.

$$J_p = \int_0^1 \varphi^2 dx = \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 cos^2\pi x dx = \frac{1}{2\pi^2}.$$

рассмотреть сопряженную задачу (6.14) при $p = \varphi = (\frac{1}{\pi})cos\pi x$:

$$-\frac{d}{dx}\frac{1}{\pi}cos\pi x\frac{d\varphi^*}{dx} = \frac{1}{\pi}cos\pi x, x \in (0,1),$$

$$\frac{d\varphi^*}{dx} = 0 \text{ при } x = 0,$$
$$\frac{d\varphi^*}{dx} = 0 \text{ при } x = 1.$$

Нетрудно видеть, что данная задача имеет решение из $\mathrm{L}_2(0,1)$

$\varphi^* = \frac{1}{\pi^2}\ln|cos\pi x|\,,\ x \neq 1/2,$

$J_p = \int_0^1 f(x)\varphi^*(x)dx = \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 cos2\pi x ln|cos\pi x|dx.$

$$J_p = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{1/2} cos2\pi x ln(cos\pi x)dx = \frac{1}{2\pi^2};$$

это совпадает со значением $J_p = \int_0^1 \varphi^2\, dx$.

задачу возмущенную:|

$$-\frac{d}{dx}\varphi'\frac{d\varphi'}{dx} = f'(x),$$

$\frac{d\varphi'}{dx} = 0$ при $x = 0$, *(6.18)*

$$\frac{d\varphi'}{dx} = 0 \text{ при } x = 1.$$

$\varphi' = \varphi + \delta\varphi,\ \ f' = f + \delta f$, *(6.19)*

$$-\frac{d}{dx}\varphi \quad \frac{d\varphi^*}{dx} = p(x),$$

$\frac{d\varphi^*}{dx} = 0$ при $x = 0$, *(6.18)*

$$\frac{d\varphi^*}{dx} = 0 \text{ при } x = 1.$$

$-\int_0^1 \varphi^* \frac{d}{dx}(\varphi +$

Рассмотрим конкретный пример. Пусть $f(x) = cos2\pi x$. Тогда, как мы видели выше, основная задача (6.12)| имеет решение $\varphi(x) = \left(\frac{1}{\pi}\right) cos\pi x.$ Будем рассматривать функционал (6.13), где $p(x) = \left(\frac{1}{\pi}\right) cos\pi x$. В данном   случае $J_p = \int_0^1 p(x)\varphi(x)dx = 1/2\pi^2$.

В качестве $f'(x)$ возмем функцию

$$f'(x) = f(x) + \delta f(x),$$

Где $\delta f(x) = \varepsilon\pi cos\pi x, \;\; \varepsilon = const > 0$. Тогда возмущенная задача (6.18) примет вид

$$-\frac{d}{dx}\varphi'\frac{d\varphi'}{dx} = cos2\pi x + \varepsilon\pi cos\pi x, \qquad x \in (0,1),$$

$$\frac{d\varphi'}{dx} = 0 \text{ при } x = 0,$$

$$\frac{d\varphi'}{dx} = 0 \text{ при } x = 1.$$

$J_p' = J_p + \delta J_p,$

где δJ_pопределяется по формуле (6.26). Для отыскания δJ_p из (6.26) нам требуется знать решение φ^* сопряженной задачи (6.20), которая в данном случае имеет вид

$$-\frac{d}{dx}\frac{1}{\pi}cos\pi x\frac{d\varphi^*}{dx} = \frac{1}{\pi}cos\pi x, \qquad x \in (0,1),$$

$$\frac{d\varphi^*}{dx} = 0 \text{ при } x = 0,$$

$$\frac{d\varphi^*}{dx} = 0 \text{ при } x = 1.$$

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{\pi^2}\ln|cos\pi x|, x \neq 1/2,$$

Кроме того, в формулу (6.26) для δJ_p входит величина $\delta\varphi = \varphi' - \varphi$. Как правило, найти ее в явном виде довольно трудно, но в данном примере это несложно. Возмущенная задача имеет решение $\varphi' = \left(\frac{1}{\pi}\right) cos\pi x + \varepsilon$, поэтому $\delta\varphi = \varphi' - \varphi = \varepsilon$

Отсюда и из (6.26) имеем

$$\delta J_p = \int_0^1 \varepsilon\pi cos\pi x \cdot \frac{1}{\pi^2}\ln|cos\pi x|\, dx - \int_0^1 \varepsilon(-sin\pi x)\left(\frac{1}{\pi^2}\frac{sin\pi x}{cos\pi x}\right) dx = \frac{\varepsilon}{\pi}\left\{\int_0^1 cos\pi x ln|cos\pi x| dx - \int_0^1 \frac{sin^2\pi x}{cos\pi x} dx\right\}$$

Интегрированием по частям легко получаем, что

$$\int_0^1 cos\pi x ln|cos\pi x| dx = \int_0^1 \frac{sin^2\pi x}{cos\pi x} dx,$$

т.е.

$$\delta J_p \equiv 0.$$

Таким образом, независимо от величины параметра ε значение функционала J_p при переходе от основной задачи к возмущенной не меняется.

Этот же результат в данном случае мы могли бы получить сразу, использовав другое представление для δJ_p:

$$\delta J_p = \int_0^1 p\delta\varphi dx = \int_0^1 \frac{1}{\pi} cos\pi x \cdot \varepsilon dx \equiv 0.$$

Список литературы:

1.Марчук Г.И. Сопряженные уравнения: Курс лекций.-М.:ИВМ РАН, 2000. – 175 с.